Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 5

Abgabe bis Montag, 18. November 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. *(1+2+1=4 Punkte)*

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) die Bernoulli-Ungleichung, den binomischen Lehrsatz, und die Ungleichung $2^k \leq k!$ für $k \geq 4$.

Aufgabe 2 (Offene Mengen). *(1+2+2=5 Punkte)*

Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $U_i \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge. Zeigen Sie:

(a) $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen in $\mathbb{R}$.

(b) $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist offen in $\mathbb{R}$, falls I endlich ist.

(c) Falls I nicht endlich ist, ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ nicht notwendigerweise offen in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Konvergenz von Teilfolgen). *(1+2+2=5 Punkte)*

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Konvergieren die Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Wert $a \in \mathbb{R}$, so auch die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

(b) Konvergieren die Teilfolgen (a_{2k}), $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$, so auch die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. In diesem Fall stimmen alle Grenzwerte überein.

(c) Angenommen, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Folge $((-1)^k a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn $a = 0$.

Aufgabe 4 (Cauchy-Kriterium). *(2+3+1=6 Punkte)*

Wie in Aufgabe 4 von Blatt 4 betrachten wir die reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, die rekursiv definiert ist durch

$$a_0 \coloneqq 1\,, \qquad a_{k+1} \coloneqq 1 + \frac{1}{a_k} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Wir verwenden von Blatt 4, dass $a_k \in [1,2]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie erneut, aber diesmal ohne das Monotonie-Kriterium, die Konvergenz dieser Folge und bestimmen Sie den Grenzwert.

Anleitung: Gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass $|a_{k+1} - a_k| \leq \frac{1}{2}|a_k - a_{k-1}|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist und darum konvergiert.

(c) Bestimmen Sie mit diesem Wissen den Grenzwert dieser Folge.