Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 4

Abgabe bis Montag, 11. November 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Konvergenz von Folgen). *(1+1+1+1+2=6 Punkte)*

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(a) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{8^n - 7^n}$, (b) $a_n := \dfrac{n^2+5}{(n+2)^2}$, (c) $a_n := \dfrac{n^5}{n!}$,

(d) $a_n := \dfrac{2^{n+1}}{1+2^n}$, (e) $a_n := \dfrac{1}{n+8}\left(\sum_{k=9}^{n} k\right) - \dfrac{n}{2}$.

Aufgabe 2 (Existenz monotoner Teilfolgen). *(5 Punkte)*

Zeigen Sie: Jede reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine monotone Teilfolge.

Aufgabe 3 (Intervallschachtelung). *(1+2+1=4 Punkte)*

Es seien reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben, wobei

$$a_k \le a_{k+1} \le b_{k+1} \le b_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und $b_k - a_k \to 0$ für $k \to \infty$. Zeigen Sie:

(a) $a := \lim_{k\to\infty} a_k$ existiert.

(b) $a_k \le a \le b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) $\lim_{k\to\infty} b_k = a$.

Aufgabe 4 (Eine rekursiv definierte Folge). *(1+1+1+2=5 Punkte)*

Die reelle Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 \coloneqq 1\,, \qquad a_{k+1} \coloneqq 1 + \frac{1}{a_k} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Konvergiert diese Folge? Falls ja, wie lautet der Grenzwert?

Anleitung: Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon a_k \in [1,2]$.

(b) Zeigen Sie: $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon a_{2k} < a < a_{2k+1}$ mit $a \coloneqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton sind.

(d) Schließen Sie für $\underline{a} \coloneqq \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$ und $\overline{a} \coloneqq \lim_{k\to\infty} a_{2k}$, dass $\underline{a} = a = \overline{a}$ und daraus die Konvergenz von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.