Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 2

Abgabe bis Montag, 28. Oktober 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Summen- und Produktformel). *(4 Punkte)*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle natürliche Zahlen n:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 , \qquad \text{(b)} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} .$$

Aufgabe 2 ($\mathbb{R}$ als metrischer Raum). *(4 Punkte)*

Sei E eine beliebige Menge und $d : E \times E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die für beliebige $x, y, z \in E$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$, *(Positive Definitheit)*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, *(Symmetrie)*

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. *(Dreiecksungleichung)*

Eine solche Abbildung nennen wir *Metrik* auf E. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \qquad (x, y) \mapsto |x - y| ,$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) Es gilt

$$|x - y| \geq ||x| - |y||$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Schranken, maximale Elemente und Suprema). *(5 Punkte)*

Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$A_1 := \left\{ 1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_2 := \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N},\ p^2 \leq 2q^2 \right\}.$$

(a) Geben Sie für beide Mengen jeweils zwei verschiedene obere Schranken an.

(b) Untersuchen Sie beide Mengen auf Existenz eines maximalen Elements.

(c) Zeigen Sie, dass $\sup A_1 = 1$ und $(\sup A_2)^2 = 2$.

Aufgabe 4 (Mengen und Abbildungen). *(7 Punkte)*

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, und seien $A, B \subset X$ sowie $C \subset Y$. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c) $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

(d) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

Geben Sie in (b),(c) und (d) außerdem jeweils ein Beispiel an, für das keine Gleichheit der Mengen gilt.