Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 1

Abgabe bis Montag, 21. Oktober 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Rechnen mit Mengen). *(6 Punkte)*

Sei M eine Menge und I eine Indexmenge. Seien A, B, C Mengen und für jedes $i \in I$ sei A_i eine Teilmenge von M. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$.

(b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

(c) $M \setminus (\cup_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} (M \setminus A_i)$.

Aufgabe 2 (Größe von Mengen). *(5 Punkte)*

Sei M eine Menge mit n Elementen. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ für $n = 2$ und $n = 3$? Was ist die Formel für beliebige natürliche Zahlen n? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 3 (Vollständige Induktion). *(4 Punkte)*

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ q \neq 1\colon \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
(Ohne Wertung: Wie könnte man diese Aussage noch beweisen?)

Aufgabe 4 (Logische Umformulierungen). *(3 Punkte)*

Geben Sie je zwei verschiedene äquivalente Umformulierungen für

(a) $\neg(A \implies B)$

(b) $A \implies (B \implies C)$

(c) $\nexists x\colon A(x) \wedge \neg B(x)$.

Aufgabe 5 (Ein seltsamer Induktionsbeweis). *(2 Punkte)*

Was ist zu dem Nachfolgenden zu sagen?

Behauptung: In einem Hörsaal sind immer nur Männer oder nur Frauen.

Beweis: Wir beweisen per Induktion für jede natürliche Zahl n die Aussage

$A(n)$: Falls n Personen im Hörsaal sind, so sind dies entweder nur Männer oder nur Frauen.

(IA): $A(1)$ ist sicherlich wahr, denn eine Person im Hörsaal ist entweder Mann oder Frau.

(IS): Seien $n+1$ Personen im Hörsaal. Wir schicken eine Person hinaus, es verbleiben n Personen. Nach Induktionsvoraussetzung sind diese Personen alle Männer oder alle Frauen. Um das Geschlecht der hinausgeschickten Person zu überprüfen, lassen wir sie wieder herein und schicken eine andere Person hinaus. Wieder haben nach Induktionsvoraussetzung alle das gleiche Geschlecht, also hat die Person, die zuerst draußen war, dasselbe Geschlecht wie die anderen, q.e.d.